SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

E. SERRA

SISTEMI IPERBOLICI NON SIMMETRIZZABILI: PROBLEMA DI CAUCHY

8 MARZO 1984

Consideriamo il Problema di Cauchy non caratteristico per sistemi pseudodifferenziali del 1° ordine iperbolici. E' noto che per tali operatori il problema di Cauchy è in generale mal posto in C^∞, a meno che il sistema sia simmetrizzabile (in particolare strettamente iperbolico).

L'iperbolicità, nel caso dei coefficienti variabili, caratterizza la varietà caratteristica, ma è condizione solo necessaria (Teorema Lax-Mizohata) affinché il problema di Cauchy sia ben posto in C^∞, se i dati sono C^∞ (diversamente dal caso analitico e iperfunzioni [3] , [12]).

In generale si devono dare condizioni non solo sul simbolo principale, ma anche sui termini di ordine più basso: anche per i sistemi a coefficienti costanti, del resto, la condizione necessaria e sufficiente in C^∞ è la iperbolicità (Gårding [7]), che, in questo caso è condizione anche sui termini di ordine inferiore.

Tranne il caso a coefficienti costanti (equazioni e sistemi) non si ha una caratterizzazione degli operatori per i quali il (C.P.) è ben posto (esistenza e unicità): i risultati sono parziali e non si riferiscono che a casi particolari (per la molteplicità costante condizione Levi).

Molti autori hanno studiato sistemi la cui parte principale è diagonalizzabile: per una bibliografia esauriente si rimanda a Hörmander [9], Kumano-go [13], Petkov [16], [17].

Per sistemi la cui parte principale non è diagonalizzabile si hanno risultati in casi particolari soltanto.

Consideriamo sistemi il cui simbolo principale non è diagonalizzabile, ma a caratteristiche di molteplicità costante: supponendo verificata una condizione tipo Levi si costruisce una parametrix del

(C.P.) in forma di operatore integrale di Fourier.

Il vantaggio di questo metodo rispetto alle tecniche di stime a priori (disuguaglianza d'energia [20]) è che permette di scrivere in forma "esplicita" la soluzione e di precisare quindi il suo comportamento in C^∞, ma anche negli spazi di Sobolev e di ottenere risultati globali per la propagazione e la riflessione delle singolarità.

Questa idea, ormai "classica", di risolvere il (C.P.) è dovuta a J. Chazarain [4] che l'ha introdotta nel caso di una sola equazione: per i sistemi sorgono tuttavia difficoltà nuove, proprie dei sistemi stessi.

Le notazioni usate sono quelle di Hörmander [8]:

Sia X' una varietà C^∞ compatta, di dimensione n, sia $X = R \times X'$, $x = (x_0, x')$ la variabile in X e $(x_0, x'; \xi_0, \xi') \in T^*X$.

Si nota $C^\infty = C^\infty(X)$ il fibrato delle densità di ordine $\frac{1}{2}$ su X. Gli operatori pseudodifferenziali considerati ammettono sviluppo in simboli omogenei (classici) e noteremo q il simbolo principale di un operatore Q.

Sia dato l'operatore P:

$$(1.1) \qquad P(x,D) = D_{x_0} - A(x_0, x'; D_{x'})$$

ove A è una matrice R x R di operatori pseudodifferenziali in X', regolari in x_0 , $A = (A_i^j)$ $A_i^j \in C^\infty(R, L^1(X'))$ $i,j = 1,\dots R$.

Non è troppo restrittivo considerare sistemi del tipo (1.1), perché qui non si richiede la diagonalizzabilità del simbolo principale, e questo permette di ridurre alla forma (1.1) operatori (diff in x_0 e pseudodiff in x') del tipo:

$$(1.2) \qquad L = D_{x_0}^m + \sum_{j=o}^{m-1} A_{m-j}(x_0, x', D_{x'}) D_{x_0}^j \left| A_{m-j} \in C^\infty(R \times L^{m-j}(X'))\right.$$

ma anche sistemi (diff in x_o e pdo in x').

$$(1.3)\qquad D_{x_o}^{m_j}\delta_i^j + \sum_{k=0}^{m_j-1} A^j_{i,m_j-k}(x_o,x',D_{x'})D^k_{x_o} \qquad i,j = 1,\dots n$$

$$A^j_{i,m_j-k} \in C^\infty(R \times L^{m_j-k}(x'))$$

Infatti il sistema (1.3) si scrive:

$$(1.4)\qquad D^{m_i}_{x_o} v_i + \sum_j \sum_{k\leq m_j-1} A^j_{i,m_j-k}(x_o, x', D_{x'})D^k_{x_o} v_j = f_i$$

e con la sostituzione:

$$u_{m_i(i-1)+k} = D^{k-1}_{x_o} \Lambda^{m_i-k} v_i \qquad 1 \leq k \leq m_i,$$

ove Λ è un operatore pseudodiff. di simbolo $|\xi'|$, il sistema (1.4) si riduce alla forma (1.1) con $R = \sum_i m_i$ e, che è importante, il polinomio caratteristico del simbolo principale (polinomio in ξ_o) rimane lo stesso.

Supponiamo che P sia un sistema iperbolico di molteplicità costante, cioè P verifica la condizione seguente:

$$(H)\qquad \det p = \prod_{\alpha=1}^{\ell} q_\alpha^{r_\alpha} \quad , \quad q_\alpha(x,\xi) = \xi_o - \lambda_\alpha(x,\xi')$$

ove λ_α sono funzioni C^∞ a valori reali e $\lambda_\alpha(x,\xi') \neq \lambda_\beta(x,\xi')$ $\forall (x,\xi')$, $\forall \alpha \neq \beta$, r_α sono interi ≥ 1 con $\sum_\alpha r_\alpha = R$

Il problema di Cauchy (globale) si formula allora come segue: data $f \in C^\infty(X)$, $g \in C^\infty(X')$ determinare $u \in C^\infty(X)$:

$$(C.P.)\qquad Pu = f \qquad u|_{t_o} = g$$

Se $r_\alpha = 1 \ \forall \alpha$, l'operatore P è strettamente iperbolico e quindi simmetrizzabile ($\exists$ cioè una matrice hermitiana r_0, $r_0 \geqq c I \quad c > 0$ tale che $r_0 p$ è hermitiana): com'è noto il (C.P.) è ben posto per i sistemi simmetrizzabili. Ma se la molteplicità r_α è > 1 assume un ruolo importante il nucleo Ker p $(x,\lambda_\alpha(x, \xi'), \xi')$; in particolare se dim Ker p $(x,\lambda_\alpha,\xi') = r_\alpha \quad \forall \alpha$ (p si diagonalizza) si può costruire una parametrix per il (C.P.) senza aggiungere condizioni (Demay [5]).

Se invece dim Ker p $(x,\lambda_\alpha(x,\xi'),\xi') = 1 \quad \forall \alpha$ e l'operatore è differenziale si ha una condizione necess. e suff. [10] affinché il (C.P.) sia ben posto "localmente" ma questo caso, con qualche accorgimento [18], [1], si può ricondurre a quello di una sola equazione e si può provare che allora la condizione posta equivale alla condizione di Levi scalare.

Se poi dim ker $p(x; \lambda_\alpha(x,\xi'),\xi')$ è localmente costante e di più vale 1 o $r_\alpha - 1 \ \forall \alpha$ si ha una condizione sufficiente - di tipo Levi - [1 7] che permette di costruire una parametrix per (C.P.). Altri risultati si riferiscono ai casi $r_\alpha = 2$ o $r_\alpha = 3$ rispettivamente.

L'idea di semplificare il problema riducendo il simbolo principale (non diagonalizzabile) alla sua forma normale di Jordan non si rivela opportuna che in alcuni casi particolari [10], [18] perché sia la forma normale che l'operatore di riduzione dipendono con discontinuità dalla matrice originale: il problema di trovare una "forma normale" (più semplice possibile) a cui ridurre una famiglia di matrici per mezzo di una trasformazione regolare è risolto per ora solo nel caso olomorfo [1].

Si è cercata allora una condizione che sia una estensione "naturale" della condizione di Levi classica (scalare) che è necessaria, sufficiente, invariante per trasformazioni canoniche.

E' ben noto che essa equivale, nel caso scalare, alla condizione di decomponibilità, secondo la seguente definizione:

Def. (L): un operatore P a molteplicità costante, $p = \prod_\alpha q_\alpha^{r_\alpha}$ è decomponibile rispetto q_β se

$$(L) \qquad P = \sum_{j=0}^{r_\beta} B_j Q_\beta^j$$

ove $B_j \in L^{R-r_\beta}(X)$ e Q_β ha simbolo (principale) q_β .

Nel caso di un sistema si introduce dapprima la definizione di sistema cofattore:

Def.: T è un sistema cofattore di P se il simbolo principale di T è ${}^{co}p$, matrice dei cofattori di p.

Se P è un sistema (H),PT e TP sono sistemi iperbolici con simbolo principale diagonale di molteplicità costante.

La definizione di decomponibilità è la seguente:

Def. L_1: un sistema P a molteplicità costante, (det $p = \prod_\alpha q_\alpha^{r_\alpha}$) è decomponibile rispetto q_β $\forall\beta$ se $\exists$ un sistema cofattore T tale che:

$$(L_1) \qquad PT = \sum_{j=0}^{r_\beta} B_j Q_\beta^j$$

ove Q_β ha simbolo (princ) q_β e $B_j = (B_{j,s}^t)$, $B_{j,s}^t \in L^{R-r_\beta}(X)$, $R = \sum_\alpha r_\alpha$

Supposta verificata la (L_1), spesso citata come condizione di Levi per la sua analogia con il caso scalare, Demay [5] ha dato la costruzione di una parametrix se $r_\alpha \leq 2$ $\forall\alpha$,Berzin-Vaillant [2] per il caso differenziale.

La (L_1) però non è condizione necessaria, di essa si può da

re la seguente estensione:

Def. (L_2) un sistema P a molteplicità costante verifica la condizione (L_2) se $\exists$ un sistema cofattore T, tale che: $\forall\beta$, $\forall(s,t)$ $\exists$ interi n_t^β n_s^β tali che:

$$(L_2) \qquad (PT)_t^s = \sum_{j\geq 0} B_{t,j}^s \, Q_\beta^j \quad ,$$

ove $B_{t,j}^t \in L^{R-r_\beta}$, $0 \leq j \leq r_\beta$, mentre se $s \neq t$

$$B_{t,j}^s \in L^{R-r_\beta + n_t^\beta - n_s^\beta} \qquad 0 \leq j \leq r_\beta - 1 - (n_t - n_s)$$

Gli operatori $B_{t,j}^s$ cambiano con β, ma è importante che $B_{t,r}^t$ ha simbolo principale $\pi_\beta = \prod_{\alpha\neq\beta} q_\alpha^{r_\alpha}$.

Se $n_t = n_s$ $\forall(s,t)$ la (L_2) si riduce alla (L_1). Questa condizione è introdotta da Kajitani [10] nel caso differenziale a parte principale diagonale ed è, in certo senso, suggerita da Leray-Ohya [21] e da Volevic [22].

Osservazione. *Condizioni di Levi* equivalenti: la formulazione (L) per la condizione di Levi è forse la più "evidente". Limitandosi, per semplicità, al caso scalare, ricordiamo la formulazione di Mizohata--Ohya data mediante l'annullarsi, sulla varietà caratteristica, dei simboli (invarianti), la definizione di Flashka-Strang, la più nota, forse: sia $P \in L^R(X)$:

(Lf) $\forall \alpha$, $x^o \in X$, $\forall \phi$ funz. caratteristica di molteplicità r_α

in x^o $(q_\alpha(x,\phi'_x)) = 0$, $\phi'_x(x^o) \neq 0)$ si ha

$$e^{-i\rho\phi} P(a\, e^{i\rho\phi}) = 0\, (\rho^{R-r_\alpha}) \qquad \rho \gg\!\!>$$

$\forall a \in C_o^\infty(x)$ $\phi'_x \neq 0$ su supp a

oppure l'equivalente di Chazarain [4]

(Lc) $\forall \alpha$, $\forall x^o \in X$ e ϕ, funz. caratteristica di molteplicità r_α in x_o

$$e^{-i\phi} P(ae^{i\phi}) \in S^{R+1-r_\alpha}(X)$$

$\forall a \in S^1(x)$ e $\phi'_x \neq 0$ su conesupp a

L'estensione al caso sistema di queste osservazioni si fa in modo "naturale".

Supposta verificata la (L_2) si ha il seguente:

<u>Teorema</u>. Sia P il sistema iperbolico (1.1) e verifichi (H) e (L_2), allora $\exists$ una relazione canonica C_{t_o} e un operatore integrale di Fourier $K_{t_o} \in I^{m-1-1/4}(X,X', C_{t_o})$ tali che: $P \cdot K_{t_o} = 0$ $K_{t_o}\big|_{t_o} = Id.$

$$m = \max_\alpha m_\alpha \ , \quad m_\alpha = \max_{s,t} r_\alpha + n_t^\alpha - n_s^\alpha$$

2. COSTRUZIONE DEL NUCLEO DEL PROBLEMA DI CAUCHY

La costruzione dell'operatore K_{t_o} è, nelle linee essenziali, la stessa, ormai classica, del caso scalare: così ci si limita a sottolineare quanto di nuovo interviene per il caso dei sistemi.

La definizione della relazione canonica C_t è classica: dalla fattorizzazione $\det p = \prod_\alpha q_\alpha^{r_\alpha}$, $q_\alpha(x,\xi) = \xi_o - \lambda_\alpha^o(x,\xi')$ si associa a q_α la relazione bicaratteristica C_α

$C_\alpha = \{(x,\xi; y,\eta) \in N_\alpha \times N_\alpha : (x,\xi)$ e (y,η) appartengono alla stessa biracatt$\}$

$N_\alpha = q_\alpha^{-1}(o) \subset T^*X\setminus o$

Per composizione con l'operatore di restrizione su $X_{t_o} = \{x;\ x_o = t_o\}$, si definisce la relazione canonica $C_{t_o} = \cup_\alpha C_{\alpha t_o}$ ove

$C_{\alpha t_o} = \{(x,\xi; y',\eta')\ (x,\xi)$ appartiene alla bicaratteristica di q_α uscente da $(t_o, y'; \lambda_\alpha(t_o, y',\eta'), \eta')\}$.

E' opportuno disporre di una carta locale per $C_{\alpha t_o}$ ottenuta mediante una funzione di fase ϕ:

Proposizione. Sia ϕ la soluzione (in un intorno conico Γ di un punto (x^o, η'^o)) dell'equazione $q_\alpha(x,\phi'_x) = 0$, $\phi/_{t_o} = \langle x', \eta'\rangle$, allora localmente $C_{\alpha t_o}$ è immagine del diffeomorfismo locale:

$$(x,\eta') \longrightarrow (x,\phi'_x, \phi'_{\eta'}, \eta')$$

Definita la fase Φ: $\Phi(x, y', \eta') = \phi(x,\eta') - \langle y', \eta'\rangle$, $C_{\alpha t_o}$ è localmente della forma $\Lambda_\Phi = \{x, \Phi'_x, y', \Phi'_{y'}\}$ per (x,y',η'): $\Phi'_{\eta'}(x,y',\eta') = 0$.

Costruzione di $K_{t_0} \in I^{m-1-1/4}(X,X',C_{t_0})$

Cerchiamo $K_{t_0} = \sum_\alpha K_{\alpha t_0}$, $K_{\alpha t_0} \in I^{m_\alpha -1-1/4}(X,X',C_{\alpha t_0})$

$$m_\alpha = \max_{l,s} (r_\alpha + n_s^\alpha - n_l^\alpha)$$

della forma $K_{\alpha t_0} = T\, E_{\alpha t_0}$, con $E_{\alpha t_0}$ soluzione di

(2.1) $$PT\, E_{\alpha t_0} = 0 \quad , \quad T\, E_{\alpha t_0}\big|_{t_0} = I_\alpha$$

ove $Id = \sum_\alpha I_\alpha$.

Proposizione. Con le notazioni precedenti si ha:

(2.2) $$Id = \sum_\alpha \frac{1}{(r_\alpha -1)!}\, d_{\xi_0}^{r_\alpha -1}\left(\frac{1}{\Pi_\alpha}\, co\, p(x;\xi)\right)\Big|_{\xi_0=\lambda_\alpha(x,\xi')}$$

Dimostrazione. Si scrive, per il teorema dei residui:

$$Id = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (zI-a(x,\xi'))^{-1}\, dz = \sum_\alpha \mathrm{Res}\left(\frac{co\, p}{\det p}\, , \lambda_\alpha\right) =$$

$$= \sum_\alpha \frac{1}{(r_\alpha -1)!}\, d_{\xi_0}^{r_\alpha -1}\, \frac{co\, p}{\Pi_\alpha}\Big|_{z=\lambda_\alpha(x,\xi')}$$

ove γ è curva chiusa di indice 1 rispetto $z_\alpha = \lambda_\alpha(x,\xi')$, $\forall \alpha$.

Da questa decomposizione segue che, per ricostruire l'identità $Id = \sum_\alpha I_\alpha$ ove

$$I_\alpha = \sum_{h=0}^{r_\alpha -1} \frac{1}{h!(r_\alpha -1-h)!} \, d_{\xi_0}^{r_\alpha -1-h} \frac{1}{\Pi_\alpha} \cdot d_{\xi_0}^{h} \, co_p \Big|_{\xi_0 = \lambda_\alpha}$$

e questa è la differenza più significativa rispetto al caso scalare e diagonalizzabile.

Equazioni di trasporto: è sufficiente costruire $E_{\alpha t_0}$, soluzione di (2.1) $\forall \alpha$: si determina come sviluppo asintotico i cui termini sono soluzioni delle equazioni di trasporto: la condizione Levi implica che le equazioni di trasporto si riducono a equazioni diff. ordinarie lungo le bicaratteristiche,di grado r_α (*) (molteplicità della bicaratt $C_{\alpha t_0}$).

Se $H_{q\alpha}$ denota, per semplicità, il campo Hamiltoniano e la corrispondente derivata (di Lie) si ha la seguente:

Proposizione: sia $A = (A_1^s)$ $A_1^s \in I^{n_1^\alpha - n_s^\alpha - R + r_\alpha - \frac{1}{4}}(X,X',C_{\alpha t_0})$

se P verifica (L_2) si ha

$$(PTA)_t^s \in I^{n_t^\alpha - n_s^\alpha - \frac{1}{4}}(X,X',C_{\alpha t_0})$$

e il suo simbolo principale è dato da:

$$\tilde{\Pi}_\alpha H_{\tilde{q}_\alpha}^{r_\alpha} \tilde{a}_t^s + \sum_1 (c_{1t}^1 H_{\tilde{q}_\alpha}^{r_\alpha -1} + \dots + c_{rt}^1)\tilde{a}_1^s \tag{2.3}$$

ove a_1^s è simbolo principale di A_1^s e $\sim$ è la composizione con la proiezione $C_{\alpha t_0} \to T^*(X)$.

(*) Si è supposto qui, per semplificare, che in (L_2) sia, per $n_t - n_1 < 0$, $B_{t,j}^1 \in L^{R-r+n_t-n_1-1}$ per $r \leq j \leq r-(n_t-n_1)$.

Notato H il sistema (H_t^1) ove

$$(2.4) \qquad H_t^1 = \tilde{\Pi}_\alpha H_{\tilde{q}}^{r_\alpha} \delta_t^1 + c_{1t}^1 H_{\tilde{q}}^{r_\alpha - 1} + \dots\dots$$

$$H = \tilde{\Pi}_\alpha H_{\tilde{q}}^{r_\alpha} I_\alpha + \text{termini di ordine più basso}$$

così H è un sistema diff ordinario di ordine r_α (lungo la bicaratt $C_{\alpha t_o}$), non caratt a $x_o = t_o$.

<u>Costruzione di</u> $E_{\alpha t_o}$ (supponiamo α fissato e lo depenniamo nel seguito per semplicità di notazioni).

Determiniamo lo sviluppo asintotico

$E_{t_o} = E_o + E_1 + \dots$ ove $E_o = (A_1^s)$

$A_1^s \in I^{r-R+n_1-n_s-\frac{1}{4}}(X,X',C_{\alpha t_o})$. I simboli principali $a_1^s \in S^{r-R+n_1-n_s}(X)$ sono soluzioni del seguente problema di Cauchy ordinario:

$$\begin{cases} H(a_o) = 0 \\ d_{x_o}^h (a_o)|_{t_o} = 0 \;, \; h \leq r-2 \\ d_{x_o}^{r-1}(a_o)|_{t_o} = \dfrac{1}{\Pi_\alpha|_{t_o}} \cdot I \end{cases}$$

qui $a_o = (a_1^s)$ e l'ultima condizione rispetta l'omogeneità.

Segue allora:

$$PTE_o \in I^{m_\alpha - r_\alpha - 1 - \frac{1}{4}}(X,X',C_{\alpha t_o}) \qquad m_\alpha = \max_{1,s}(r_\alpha + n_1^\alpha - n_s^\alpha)$$

e il simbolo principale di

$TE_o|_{t_o}$ è dato da $\frac{1}{\Pi_\alpha} d_{\xi_o}^{r-1} \; {}^{co}p|_{t_o}$ poiché:

$$\mathbb{T}(e^{i\phi_\alpha} a_o)|_{t_o} = \frac{1}{(r-1)!} \frac{1}{\Pi_\alpha} d_{\xi_o}^{r-1} \; {}^{co}p|_{t_o} + r_o \qquad r_o = (r_{o1}^s) \quad r_o^{\ s} \in S^{n_1-n_s-1}$$

Costruiamo $E_1 = A_1 + A_2 + \dots. + A_r$

ove $A_h = (A_{h1}^s)$, $A_{h1}^s \in I^{n_1 - n_s - R+r-h-1/4}$

e il suo simbolo principale $a_h = (a_{h1}^s)$ è soluzione del seguente Problema di Cauchy ordinario:

$$\begin{cases} H(a_h) = -f_h \\ d_{x_o}^j \, a_h|_{t_o} = 0 \qquad 0 \leq j < r-1-h \\ d_{x_o}^{r-1-h} \, a_h\Big|_{t_o} = \binom{r-1}{h} d_{\xi_o}^h \left.\frac{1}{\Pi_\alpha}\right|_{t_o} \cdot I \\ d_{x_o}^{r-h} \, a_h\Big|_{t_o} = \binom{r-1}{h-1} d_{\xi_o}^{h-1} \left.\frac{1}{\Pi_\alpha}\right|_{t_o} \cdot r_o \end{cases}$$

ove f_h è la matrice simbolo il cui termine $(1,s)$ è il simbolo principale di $(PT(E_o + A_1 + \dots + A_{h-1}))_1^s$ che appartiene a $S^{n_1-n_s+r-h}$, segue quindi:

$PT(E_o + E_1) \in I^{m_\alpha - r - \frac{1}{4}}$ e $T(E_o + E_1)|_{t_o}$ ha simbolo principale $I_\alpha + s_o$, $s_o \in S^{m_\alpha - r-2}$.

Allo stesso modo si costruisce $E_l = B_1 + \dots + B_r$, $l \geq 2$ e il risultato segue per induzione.

La parametrice data nel teorema permette, metodo ormai standard, di costruire la soluzione del problema di Cauchy.

Per provare l'unicità basta imporre la condizione (L_2) anche per un sistema cofattore "a sinistra".

BIBLIOGRAFIA

[1] Arnold V., Matricies depending on parameters. Uspehi math nank 26, 101-114, 1 971.

[2] Berzin-Vaillant. Parametrix du problème de Cauchy pour un système... C.R.A.S. t 283, 1976.

[3] Bony-Shapira. Solutions hyperfonctions du problème de Cauchy. Lecture Notes Math. Springer 287, 1973.

[4] Chazarain . Opérateurs hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constant. Ann. Fourier 24, 1974.

[5] Demay. Parametrix pour des systèmes hyperboliques... multiplicité const. J. Math. Pur Appl. 56, 1977.

[6] Duistermaat-Hörmander. Fourier Integral Operators. Acta Math. 128, 1 972.

[7] Garding . Linear hyperbolic PDE constant coefficients. Acta Math. 85, 1950.

[8] Hörmander. Fourier Integral Operators. Acta Math. 121, 1971.

[9] Hörmander. Cauchy problem for diff. eq. doublé characteristics.J. Analyse Math. 32, 1977.

[10] Kajitani. Cauchy problem for nonstrictly hyperbolic systems. RIMS 5, 1979.

[11] Kajitani. Cauchy problem... Leray Volevic systems. J. Math. Kyoto 22, 1982.

[12] Kashiwara-Shapira. Micro-hyperbolic systems. Acta Math. 142, 1979.

[13] Kumanogo Taniguchi. FIO of Multiphase and Fundamental Solution for Hyperbolic System. Funkcialaj Ekvacioj 22, 1979.

[14] Mizohata. n kowalewskian Systems. Russian Math Surveys 29,1 1975.

[15] Mizohata. On the hyperbolicity in ... real analytic functions and Gevrey. Hokkaido Math. J. 12, 1983.

[16] Petkov-Ivrii. Necessary conditions for the Cauchy Problem... Uspehi-MatNauk 29, 1974.

[17] Petkov. Paramétrix of the Cauchy Problem... Trudy Mosca 37, 1978.

[18] Petkov. Microlocal Form for Hyperbolic Systems. Math Nachr. 93, 1979.

[19] Serra. Parametrix for non symm hyperbolic systems... preprint.

[20] Yoshida. Energy inequalities and finite propagation speed... Prac. Japan Acad. 50, 1974.

[21] Leray-Ohya. Systèmes lineair hyperholiques nonstricts. C.N.R.B. Liege, 1964.

[22] Volevic L.R. On general systems of diff. eq. Soviet Math. Dokl. 1, 1960.